

### Sesión 1

#### Propósito

Los alumnos explorarán diferencias en fenómenos que presentan una variación lineal o no lineal, por medio de preguntas detonadoras; además, comenzarán a distinguirlas en su forma algebraica, tabular y gráfica, mediante actividades introductorias.

**Tip 1.** Dé a los alumnos una pequeña introducción, mencionando que trabajarán con variaciones más allá de las lineales, porque existen otros fenómenos más complejos que un modelo de variación lineal no logra explicar por sí mismo o, incluso, tratarlos así es un error.

**Tip 2.** Para responder de una forma más dinámica las preguntas de la sección **ANALIZO** de la **página 93**, lance suavemente un objeto (como un peluche o una pelota) al azar a un alumno para que dé su opinión de cualquier pregunta de la página. Después, pida que lo hagan así sucesivamente de un alumno a otro hasta que todos hayan participado. Si en algún caso, un alumno no está de acuerdo con alguna respuesta, anime al debate para escuchar distintas perspectivas. Cierre preguntando si consideran que la trayectoria del objeto podría tener alguna relación con lo que estudiarán los siguientes días.

**Tip 3.** Inste a los alumnos a que busquen una imagen en internet, con ayuda de su *smartphone* o tableta, que resuma lo visto en la sección **ANALIZO**.



### Esfera 4

¿Qué es lineal y qué no?

¿Cómo escribo o describo algo que no es recto?

¿Puedo explicar fenómenos o eventos con dibujos de curvas?

#### Desalinea

Diferencia entre variaciones lineales y no lineales a partir de sus representaciones gráficas y algebraicas.

### Sesión 1

**Tip 4.** Otorgue un tiempo a los alumnos para que respondan la **actividad 01, página 94**. Un error común es que al analizar gráficas que no son lineales consideren solo una parte de la gráfica, lo que puede llevarles a concepciones erróneas, ya que algunas gráficas pueden parecer lineales por partes. Si esto sucede pide que analicen una parte más amplia de la gráfica y no solo un segmento lineal.

**Tip 5.** Para graficar las funciones de la actividad **02** de la sección **RECONOZCO, página 95**. Pide que consideren todos los puntos calculados, ya que considerar solo 2 o 3 no son suficientes para estudiar el comportamiento de la gráfica.

**Tip 6.** Solicite a sus estudiantes que indaguen los contenidos de los recursos **Key** sobre variaciones lineales, variaciones no lineales y variaciones cuadráticas.

### Aprendizaje aumentado

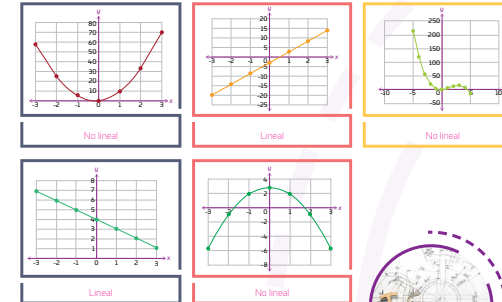
Sugerimos añadir, como parte de la exploración de conocimientos de la **página 95**, un poco de trabajo lúdico para los estudiantes con la app **Kahoot!**. En el vínculo <https://create.kahoot.it/>, podrá organizar una competencia, primero eligiendo si serán participantes individuales o por equipos, y compartiendo después el PIN para que los colegas lo ingresen en sus iPads. Considere que para crear un kahoot como docente, deberá registrarse. No pierda de vista que la sección **RECONOZCO** está diseñada para evaluar los conocimientos previos, por lo que los estudiantes pueden obtener muy bajos puntajes. Mencióneles que al terminar la esfera podrán realizar nuevamente esta actividad para mejorar sus puntuaciones o realizar la competencia en otras condiciones o equipos.



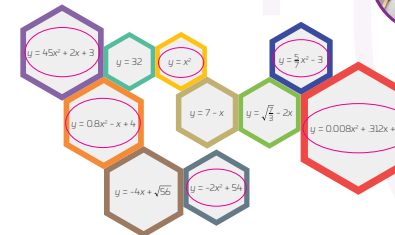
#### RECONOZCO

Comienza la Esfera de Exploración identificando qué actividades puedes responder con base en lo que ya sabes. No olvides resolverlas de nuevo en tu cuaderno al terminar. ¡Así descubrirás cuánto has avanzado!

01 Escribe debajo de cada gráfica si corresponde a una ecuación lineal o a una no lineal.

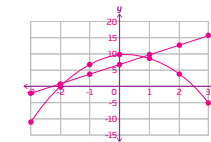


1.1 Rodea las ecuaciones que sean no lineales.



02 Completa la tabla. Luego, marca los puntos obtenidos en la gráfica de abajo y únelos con una línea suave.

x	$y_1 = -2x^2 + x + 10$	$y_2 = 3x + 7$	Punto (x, y)	Punto (x, y)
-3	-11	-2	(-3, -11)	(-3, -2)
-2	0	1	(-2, 0)	(-2, 1)
-1	7	4	(-1, 7)	(-1, 4)
0	10	7	(0, 10)	(0, 7)
1	9	10	(1, 9)	(1, 10)
2	4	13	(2, 4)	(2, 13)
3	-5	16	(3, -5)	(3, 16)



2.1 Observa la gráfica y contesta.

Nota que los ejes no usan la misma escala. ¿La gráfica curva tendría una forma diferente si los ejes tuvieran la misma escala?

No, pero luciría menos achatada, o más puntiaguda.

Y, en la misma situación, ¿qué pasaría con la recta?

La recta seguiría viéndose así, pero más inclinada hacia arriba.

Marca una ✓ en la casilla que corresponda. Al final de la Esfera de Exploración regresarás a esta lista de cotejo.

	Antes de la Esfera de Exploración	Al terminar la Esfera de Exploración
1. Identifico la diferencia entre variaciones lineales y no lineales, gráfica y algebraicamente.	Si <input type="radio"/> No <input type="radio"/>	Si <input type="radio"/> No <input type="radio"/>
2. Reconozco variaciones cuadráticas tabular, gráfica y algebraicamente.	Si <input type="radio"/> No <input type="radio"/>	Si <input type="radio"/> No <input type="radio"/>

Puntos obtenidos:

#### INVESTIGO

##### Aprendizaje esperado

Identifico en las variaciones lineales y no lineales a partir de sus representaciones gráficas y algebraicas.

**Keys**  
Variaciones lineales y no lineales  
Variación cuadrática



### Sesión 2

#### Propósito

Los estudiantes analizarán la importancia que tienen las distintas expresiones matemáticas en la vida diaria y cómo puede cambiar la visión de toda una ciencia al cambiar un modelo de cálculo lineal a uno no lineal.

**Tip 1.** Antes de comenzar con la lectura de la sección **COMPRENDO**, **página 96**, pregunte a los alumnos qué es para ellos una expresión y qué tipo de expresiones conocen. Trate de incentivar a todos los alumnos a que participen para construir su definición. A continuación, algunas definiciones de la Real Academia Española:

“Especificación, declaración de algo para darlo a entender. / Palabra, locución o conjunto de palabras sujetas a alguna pauta. Conjunto de números y de símbolos ligados entre sí por los signos de las operaciones matemáticas.”

Fuente: [https://esant.mx/ac\\_unoi/sumt3-012](https://esant.mx/ac_unoi/sumt3-012)

**Tip 2.** Una vez leída la sección **COMPRENDO**, anime a los alumnos a señalar otros fenómenos en donde un modelo lineal no es una buena opción para describirlos. Aproveche, como ejemplo, la petición que hizo de observar con atención la trayectoria del objeto lanzado entre ellos la sesión anterior.

**Tip 3.** Para realizar la actividad de la **página 97**, inste a los alumnos a comentar con otros compañeros por qué aquellas actividades que dibujaron son lineales o no lineales.

**Tip 4.** Permita a los alumnos que investiguen en internet ejemplos gráficos de las principales variaciones no lineales (cuadrática y cúbica), puede usar la siguiente opción: [https://esant.mx/ac\\_unoi/sumt3-013](https://esant.mx/ac_unoi/sumt3-013)

COMPRENDO ●●●●●

¿Tus papás entienden lo que escribes al chatear con tus amigos? Y tus profesores, ¿qué opinan de la forma en que redactas tus trabajos escolares? El lenguaje común está lleno de ambigüedades, esto lo dota de una impresión valerosa según diferentes puntos de vista: aceptada en literatura, indeseable en la academia.

El lenguaje de las ciencias y las matemáticas, a diferencia del lenguaje común, anhela la precisión. Es deseable que todos entendamos igual los conceptos de la ciencia. También lo es disponer de un lenguaje muy expresivo, que con pocos símbolos o conceptos transmita mucha información. Por ello, este lenguaje ha evolucionado con el tiempo para hacerse más expresivo. Observa la siguiente tabla:

Comparación de simbología algebraica		
Simbología hacia 1559	Simbología actual	
Carácter cósico	Nombre	
n	número	$x^n$
co	cosa	$x^2$
ce	censo	$x^3$
cu	cubo	$x^4$

Fuente: Mena, V. (2013). ¿Cuánto vale la x? Amuzaga, España.

Observa que la actual "x" de nuestras ecuaciones, la incógnita que aparece cuando convertimos un problema a lenguaje matemático y es la que se busca conocer, antes se conocía como "la cosa" y era representada por el símbolo "co" (aunque con la escritura del siglo XVI, no precisamente con la mostrada aquí, ¿has visto libros de esa época?). Como puedes notar, la simbología algebraica se ha tornado más sencilla al incorporar una notación en la que, por ejemplo,  $x^2$  significa  $x \times x$ .

Otro ejemplo de la expresividad del lenguaje matemático está en el concepto de variación lineal, que ya has estudiado. Al decir que una cantidad y varía linealmente respecto a otra,  $x$ , indica que:

- 1) la gráfica de los datos  $x$  vs  $y$  es una línea recta;
- 2) la variación está gobernada por la ecuación  $y = mx + b$ .

Esto puede parecer obvio, pero también considera que:

- 3) en un modelo lineal, solo necesitamos dos pares de valores,  $m$  y  $b$ , o dos coordenadas como  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , para conocer bien la variación, y, en consecuencia,
- 4) este modelo es el más sencillo, lo cual indica la simplicidad propia del fenómeno modelado.

En 1929, Edwin Hubble graficó las posiciones y velocidades de las galaxias cercanas a la nuestra y encontró que podían ajustarse a un modelo de variación lineal: la velocidad de una galaxia era proporcional a su distancia. Con base en este modelo se desarrolló la cosmología, la ciencia que estudia el nacimiento, evolución y composición del universo, y su consecuencia más famosa es la teoría del Big Bang o Gran Explosión. Sin embargo, mediciones más precisas de la distancia a las galaxias realizadas en 1998 mostraron que la ley de Hubble no es lineal. Esto cambió dramáticamente la situación. Al descartarse la sencillez del modelo también se descartó la simplicidad del fenómeno descrito, al grado que actualmente modela la no linealidad de la ley de Hubble es el problema más importante de la cosmología. La razón es que una variación no lineal de la velocidad respecto a la posición de las galaxias implica la existencia de una fuerza a escala universal de la que no se tienen otras evidencias. Esta fuerza es llamada "energía oscura" y nadie sabe qué la origina.

Como ves, saber si una variación es lineal o no, o no, nos da una idea acerca de la complejidad del fenómeno modelado. Y esto es una virtud del lenguaje matemático. Desde tu punto de vista, ¿qué tan preciso y expresivo dirías que es el lenguaje que usas para comunicarte? ¿Y tus actividades, ¿qué tan lineales crees que son (en tiempo, dinero o esfuerzo, por ejemplo)?

Ricardo Medel Esquivel

Contrasta la información que investigaste con la que acabas de leer, reflexiona sobre ello y realiza lo siguiente.

Dibuja cuatro actividades que realices (como correr, nadar, comer, mirar el cielo nocturno), dos que consideres lineales y otras dos que pienses que no lo son.

Actividades lineales

Actividades no lineales

Clasifica en los recuadros tus conversaciones como "técnicas" (ya sea por el uso de modismos o el lenguaje particular de un área de estudio) o "normales" (que cualquiera puede entender).

Conversaciones "normales"

Conversaciones "técnicas"

¿Hay algo que no te queda claro? No te preocupes, escríbelo aquí y cuando termines la Esfera, regresa y dale solución.

### Sesión 3

#### Propósito

Los alumnos ejercitarán la identificación entre variaciones lineales y no lineales en su forma gráfica y notarán las principales diferencias. También pondrán a prueba su conocimiento para tabular y graficar distintas formas de las variaciones lineales y no lineales.

**Tip 1.** Antes de comenzar a realizar la **actividad 01** de la sección **PRACTICO**, **página 98**, recuérdelos que una pendiente negativa implica un decrecimiento y la recta se ve inclinada hacia abajo. Por el contrario, una pendiente positiva indica un crecimiento y la gráfica tiene una inclinación hacia arriba. Luego, solicite a algunos estudiantes que compartan la información que crean necesaria para resolver la actividad. Cabe mencionar que la diferencia entre funciones lineales y no lineales es la forma de la gráfica, aún así puede que a algunos estudiantes se les complique. De ser necesario, pida que expresen sus dudas con el resto de sus compañeros para despejarlas.

**Tip 2.** Organice una actividad donde un alumno pase al frente y dibuje una gráfica sin mencionar de que tipo se trata, el siguiente estudiante debería pasar al frente para mencionar si es lineal o no, posteriormente borrará la gráfica y dibujará una nueva, para repetir el proceso hasta que todos los estudiantes del salón hayan pasado. En el proceso, clasifique las curvas de acuerdo con criterios que se vayan generando entre todos, por ejemplo, considerando si son cóncavas o convexas, si tienen uno o más cimas o simas. Al terminar, discuta con ellos si creen que esa clasificación sirva para averiguar qué tipo de ecuación representa a cada curva dibujada.

#### PRACTICO

Resuelve las actividades, apóyate en tu indagación.

01 Une las gráficas con el semicírculo central adecuado.



Marca con ☒ si estás o no de acuerdo con las aseveraciones sobre las gráficas anteriores. Discútelas con un compañero. R. M.

	De acuerdo	En desacuerdo
La forma de las variaciones no lineales son todas parecidas entre sí.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Las variaciones lineales siempre están representadas por rectas, de ahí su nombre.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Una variación no lineal puede identificarse porque los valores se verán como si fluctuaran, aumentando y disminuyendo.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
La forma de las variaciones lineales no se ve afectada por la escala.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

© UNOi



### Sesión 3

**Tip 3.** Después de realizar la actividad **02 de la página 99**, inste a los alumnos a hacer equipos para debatir las siguientes preguntas relacionadas con la linealidad o no linealidad de las gráficas: *La variación  $y = 5$ , ¿es lineal o, no? ¿Por qué? ¿Cuáles son las principales diferencias entre la gráfica de una ecuación lineal y una no lineal? ¿Qué relación tiene el grado de la ecuación del polinomio con que la gráfica sea lineal o no lineal? ¿Cuál es el grado máximo que una ecuación puede tener para decir que es una variación no lineal?*

**Tip 4.** Para hacer conclusiones del tipo anterior, mencione a los alumnos que todos los polinomios de grado mayor o igual a 2 pertenecen al grupo de las variaciones no lineales. Como ejemplo, revise los elementos y el grado de:  
a)  $x^2 + 2x + 3$ , b)  $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

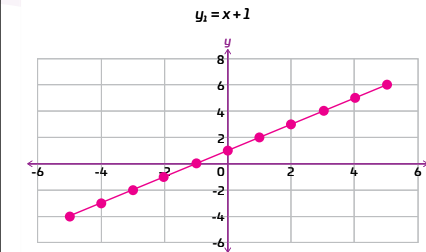
### Aprendizaje aumentado

Le proponemos añadir el uso de la app **Desmos Graphing Calculator** para que los estudiantes visualicen, y experimenten con, las ecuaciones de la actividad 02, **página 99**. Organice grupos de estudiantes y pida que capturen los valores solicitados en cada una de las tablas, unos con cálculos a mano y, otros, haciendo las operaciones en la propia app. Al terminar, solicite que grafiquen todas las ecuaciones simultáneamente y hágales preguntas como: *¿se parecen las gráficas que ven a las del libro?, ¿qué diferencias o similitudes encuentran?, ¿qué diferencias hay entre ellas?, ¿qué grafica tiene cambios más "bruscos"? Para terminar, recupere lo que hayan comentado sobre el término cuadrático, para consolidar el hecho de que, a mayor valor del exponente, mayores serán los cambios en los resultados de las tablas. Si lo considera conveniente, explore esto último animando a los escolares a colocar un exponente mayor, en lugar del 2, en el término cuadrático; sin embargo, resalte que estas últimas gráficas ya no son de funciones o ecuaciones cuadráticas, y aproveche para preguntar si todos ya relacionan correctamente la palabra "cuadrático" con un término con exponente 2 y qué estrategias usaron para no olvidarlo.*

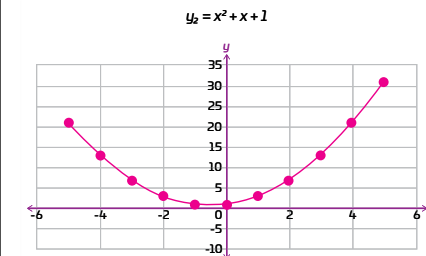
02 Completa la tabla de valores y marca los puntos en su sistema coordinado. Al terminar, une dichos puntos con una línea suave.



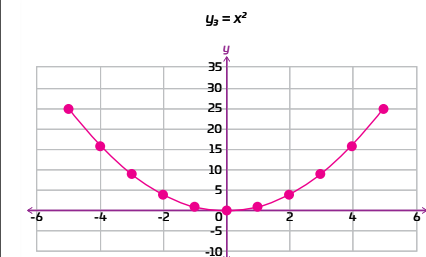
x	$y_1 = x + 1$
-5	$-5 + 1 = -4$
-4	$-4 + 1 = -3$
-3	$-3 + 1 = -2$
-2	$-2 + 1 = -1$
-1	$(-1) + 1 = 0$
0	$(0) + 1 = 1$
1	$(1) + 1 = 2$
2	$(2) + 1 = 3$
3	$(3) + 1 = 4$
4	$(4) + 1 = 5$
5	$(5) + 1 = 6$



x	$y_2 = x^2 + x + 1$
-5	$(-5)^2 + (-5) + 1 = 21$
-4	$(-4)^2 + (-4) + 1 = 13$
-3	$(-3)^2 + (-3) + 1 = 7$
-2	$(-2)^2 + (-2) + 1 = 3$
-1	$(-1)^2 + (-1) + 1 = 1$
0	$(0)^2 + (0) + 1 = 1$
1	$(1)^2 + (1) + 1 = 3$
2	$(2)^2 + (2) + 1 = 7$
3	$(3)^2 + (3) + 1 = 13$
4	$(4)^2 + (4) + 1 = 21$
5	$(5)^2 + (5) + 1 = 31$



x	$y_3 = x^2$
-5	$(-5)^2 = 25$
-4	$(-4)^2 = 16$
-3	$(-3)^2 = 9$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$(0)^2 = 0$
1	$(1)^2 = 1$
2	$(2)^2 = 4$
3	$(3)^2 = 9$
4	$(4)^2 = 16$
5	$(5)^2 = 25$



### Sesión 4

#### Propósito

Los alumnos analizarán y compararán semejanzas y diferencias de diferentes tipos de gráficas. Además, aprenderán a identificar las diferencias entre las variaciones estudiadas en esta **Esfera** en su forma algebraica. También conocerán distintas aplicaciones de las variaciones no lineales en el campo de la arquitectura para optimizar la eficiencia de las fuentes de energía en estas construcciones, en la **Agenda UNOi hacia el Futuro**.

**Tip 1.** Pregunte a los escolares en dónde pueden encontrar en su vida diaria, formas parecidas a las gráficas de las variaciones no lineales. Guíelos para que intercambien opiniones compartiendo ejemplos e ideas.

**Tip 2.** Para complementar el aprendizaje de las **actividades 03 y 04** de la **página 100**, invite a los alumnos a distinguir las variaciones lineales de las no lineales de las siguientes ecuaciones:

- a)  $y = \frac{1}{x}$  (variación no lineal).
- b)  $y = ax + b$  (variación lineal).
- c)  $y = 8$  (variación lineal).
- d)  $y = \sqrt{x}$  (variación no lineal).

**Tip 3.** Para ampliar el número de tarjetas de la **actividad 05** de la **página 101**, proponga a los alumnos que sugieran 3 o 4 ecuaciones más, ya sean lineales o no lineales, con su respectiva gráfica para usarlas con otros alumnos y hacer más interesante el juego.

**03** Compara tus tablas y gráficas de la página anterior con las de dos compañeros. Discutan las preguntas y anota las conclusiones y respuestas a las que llegaron con los argumentos que mejor te convengan.

En cuanto a posición y forma, ¿cuáles son las curvas más parecidas y cuál difiere?

Las gráficas  $y$ ,  $y$ ,  $y$ , son más parecidas y son no lineales, en cambio, la gráfica  $y$ , es lineal.

Compara las ecuaciones de las gráficas que se parecen, ¿cuál es el elemento que las diferencia de la otra?

El término  $x^2$  es el que causa que las gráficas de las ecuaciones  $y$ ,  $y$ ,  $y$ , sean parecidas, porque los coeficientes son los mismos, en los términos respectivos, y la otra ecuación carece del término cuadrático.

Utilizando las tablas anteriores, ¿qué explicación dan a que aparezcan esas semejanzas y diferencias entre las gráficas?

El término cuadrático hace que todos los valores de  $y$  sean positivos, esto no sucede con la ecuación lineal.

**04** Identifica y anota: ¿cuáles ecuaciones son lineales (L) y cuáles no lineales (NL). Después, responde.

$y = 5x^2 + 3x + 2$   $y = -6.2$

$y = 8 - 7x^2$   $y = -x^2 - 2$

$y = x^2$   $y = -12x + 6$

¿Qué tan rápido pudiste identificarlas? ¿Podrías hacerlo igual de rápido si aparecieran otras variables en lugar de  $x$  y  $y$ ?

**AGENDA UNOI HACIA EL FUTURO**

**ENERGÍA**

¿Qué tienen en común las ecuaciones, los retos energéticos del futuro y la arquitectura? La respuesta es **Cype**.

Cype es una compañía de software que desarrolla programas para que arquitectos e ingenieros diseñen estructuras eficientes en términos de recursos. A partir de modelos matemáticos y ecuaciones, se puede asegurar que los espacios arquitectónicos y urbanísticos incorporen elementos bioclimáticos donde su consumo de energía sea muy reducido.

Esto permite desarrollar ciudades inteligentes desde su mismo diseño. Sin embargo, este nivel de eficiencia solo es aplicable para nuevas construcciones, lo que deja fuera a toda la arquitectura con la que ya contamos. Además, se centra en cómo eficiente procesos y no en la incorporación de nuevas fuentes de energía, por ejemplo, por lo que muchos consideran esta herramienta como algo que trabaja en la superficie del problema energético, sin profundizar.

¿Cómo crees que podrían aplicarse herramientas de este tipo para resolver los retos de energía del futuro?

100

**05** Reúnete con dos compañeros para jugar.

Memoria de variaciones lineales y no lineales

**Materiales**

- Doce tarjetas iguales de cartón de 12 x 8 cm
- Un dado

**Procedimiento**

**Paso 1.** Copien en las tarjetas las figuras y expresiones siguientes. En el caso de las figuras, los ejes coordenados van justo en el centro. La cuadrícula es de referencia, y la escala es igual en ambos ejes, considérenla 1:1.

**Paso 2.** Revuelvan las tarjetas y colóquelas boca abajo, sin que queden encamadas.

**Paso 3.** Por turnos lancen el dado, si es número par, voltean tarjetas hasta encontrar una ecuación con exponente par o su gráfica.

**Paso 4.** El jugador tiene una oportunidad para descubrir la tarjeta que corresponde a la que volteó.

**Paso 5.** Si el jugador acertó, sigue volteando tarjetas; si no, el turno pasa a otro participante.

**Paso 6.** Si el número del dado sale impar, se sigue el mismo proceso, buscando en este caso una gráfica o ecuación que corresponda a un exponente impar.

**Paso 7.** Gana quien acumule más tarjetas.

Después de jugar, y ya que se hayan familiarizado con las ecuaciones, discutan cómo puede ampliarse rápidamente la cantidad de tarjetas utilizando el término constante de cada ecuación. Comenten sus conclusiones con el resto del grupo.

101

### Sesión 5

#### Propósito

Los estudiantes ejercitarán sus habilidades jugando "Memoria de variaciones lineales y no lineales". Aprenderán también en el Espacio Procedimental graficar una ecuación cuadrática haciendo los menos cálculos posibles.

**Tip 1.** Puede sugerir a los escolares que practiquen el Espacio Procedimental con las siguientes ecuaciones. Sin embargo, tenga en cuenta que la siguiente actividad (para la sesión próxima) tendrá ejercicios a realizar sobre los planos cartesianos de esta sección.

- $9x^2 - 5x + 4$
- $x^2 + 3x + 1$
- $x^2 + x + 1$
- $-3x^2 - 4x + 2$
- $-2x^2 + 1 - x^2 + 3$
- $x^2 + 1$
- $-5x^2$

**Tip 2.** Al realizar las actividades 06 y 07 de la página 103, permita a los alumnos que se reúnan con un compañero para responder sus dudas con ellos.

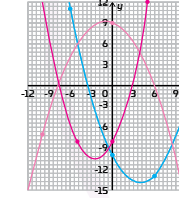
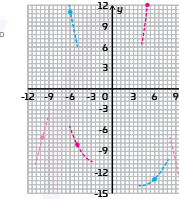
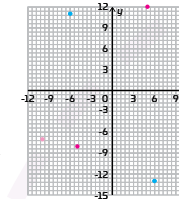
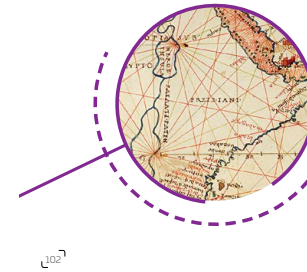
**Tip 3.** Utilice un proyector para que sigan paso a paso las indicaciones de la actividad 07, y así reproduzcan los mismos pasos en sus equipos.

**Tip 4.** Anime a los alumnos a investigar en Internet cómo dibujar de otro modo una parábola en GeoGebra, o que prueben ellos mismos variantes al procedimiento descrito en la actividad 07 de la página 103.

#### 1 Espacio 2 Procedimental

¿Cómo puedo dibujar una ecuación cuadrática haciendo los menos cálculos posibles?

- Primero me aseguro de que es una ecuación cuadrática  $y = ax^2 + bx + c$ . Es decir que  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los coeficientes, con  $a$  distinto de 0.
- Ahorro tiempo en el dibujo al aprovechar la simetría de la parábola: una de sus ramas es el reflejo de la otra a partir de su eje de simetría.
- Por ejemplo, en  $y = 0.25x^2 - 2x - 10$  elijo un valor en el eje  $x$  y su simétrico como referencia inicial. Dicho valor dependerá de los coeficientes; en este caso no son muy grandes, así que uno adecuado es  $x = 6$ , y su simétrico es  $x = -6$ .
- Evalúo ambos valores en la ecuación para completar los puntos. En este caso  $(-6, 11)$  y  $(6, -13)$ . Antes de representarlos, no debo olvidar que al hacer  $x = 0$  obtengo otro punto fácilmente, en este caso  $(0, -10)$ .
- Elijo una escala adecuada. También depende de los coeficientes, si tomo en cuenta los puntos que calculé puedo hacer una buena propuesta.
- Ahora sí, marco los primeros dos puntos. Hago trazos ligeros para indicar cómo imagino que da vuelta la parábola (solo puede hacerlo de arriba para abajo o viceversa). Agrego el punto con  $x = 0$ , para mejorar mi perspectiva.
- Si es necesario, calculo un nuevo punto que aclare las dudas que me llegaran a surgir. A la derecha puedo ver en tres imágenes los pasos aquí descritos.
- Este procedimiento no permite calcular con exactitud el vértice de la parábola, pero si estimarlo adecuadamente. Para ello, debo recordar lo que indiqué en Key.



06. Dibuja en las imágenes anteriores las siguientes parábolas con el procedimiento ahí indicado. Luego, discute con dos compañeros las preguntas y respóndelas.

$$y = 0.4x^2 + 2x - 8$$

$$y = -0.2x^2 - 0.4x + 9$$

Antes de hacer cálculos, ¿qué harían para saber qué tan abierto o cerrado quedará el dibujo de cada parábola?

Conforme el coeficiente del término cuadrático sea más grande, la parábola será más cerrada.

¿Es posible mejorar el método anterior para hacer dibujos más rápidos y precisos?

Si, si se calcula el vértice de la parábola con la fórmula  $x = -b/(2a)$  se tiene un punto adicional, que dice además dónde está el eje de simetría de la parábola.

¿No has comentado cómo usar el signo del término cuadrático para hacer el dibujo? Hazlo aquí.

El signo del término cuadrático indica si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo, así que también es un dato que permite agilizar la elaboración del dibujo.

07. Abre GeoGebra y haz lo que se indica.

Con GeoGebra puedes trabajar con parábolas a la inversa de como lo hiciste en las actividades pasadas. Es decir, puedes generar una parábola a partir de un conjunto de datos.

**Paso 1.** Ya sea que uses la versión web o aplicación (Geométrica) o el programa para computadora (GeoGebra Clásico 6), primero registra un conjunto de datos sobre los que quieras generar una parábola que "pase cerca" de ellos. En la primera imagen se muestran ocho puntos, úsalos o propón algunos cercanos.

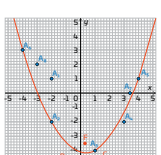
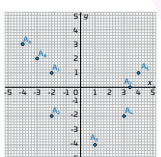
**Paso 2.** Dibuja una recta horizontal (línea de directriz). Tienes dos opciones: Marca primero dos puntos (a la misma altura) y usa el comando **Recta**, o usa los comandos **Perpendicular** o **Paralela**, que requieren también que marques un punto y elijas el eje  $Y$  o el eje  $X$ , respectivamente. Mira los iconos de esos comandos.

**Paso 3.** Marca otro punto y edita su nombre para llamarlo Foco o **F**. Estudiarás este elemento y la directriz más adelante. Aquí solo los usaremos para obtener una parábola semejante a las que has trabajado. Tanto el foco como la recta horizontal se muestran en anaranjado en la segunda imagen.

**Paso 4.** Selecciona el comando **Parábola**. Tienes que buscarlo dentro de los iconos adicionales. Mira aquí cuál es para que puedas localizarlo.

**Paso 5.** Con el comando activo, marca la directriz y el foco para ver la parábola.

**Paso 6.** Manipula el foco o la directriz (sin que deje de ser horizontal) para generar una parábola que pase cerca de los puntos deseados.



### Aprendizaje aumentado

Sugerimos añadir, al finalizar el **Espacio Procedimental** de la **página 102**, el uso de la app **GeoGebra Augmented Reality** para que los estudiantes visualicen distintas perspectivas de una figura y tomen capturas de pantalla de cuando identifiquen relaciones lineales y cuadráticas. Para ello, al abrir la app, pida que en el menú seleccionen "Superficie reglada". Luego, los estudiantes deberán encontrar perspectivas que resalten las relaciones buscadas en la figura.

Al terminar, invite a los estudiantes a compartir y exponer sus fotografías. Invítelos a votar por la mejor foto, tanto lineal como cuadrática, considerando como criterios de decisión la que les parezca más artística y la que muestre de mejor manera una relación lineal o cuadrática. Los ganadores explicarán entre qué elementos se presentan esas relaciones. Apóyelos para corregir cualquier mala interpretación, resaltando que eso no demerita el trabajo que realizaron.

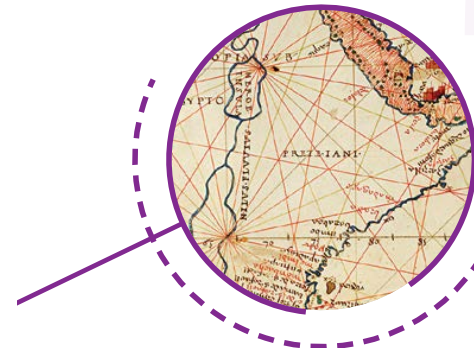
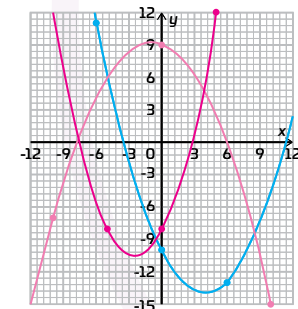
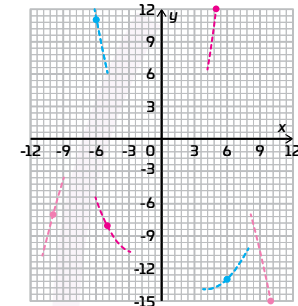
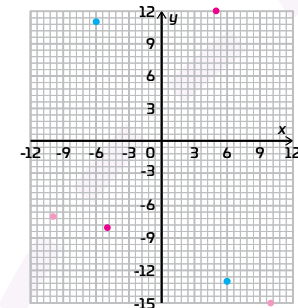


### 1 Espacio 2 Procedimental 3

¿Cómo puedo dibujar una ecuación cuadrática haciendo los menos cálculos posibles?



1. Primero me aseguro de que es una ecuación cuadrática:  $y = ax^2 + bx + c$ . Es decir que  $a, b$  y  $c$  son los coeficientes, con  $a$  distinto de 0.
2. Ahorro tiempo en el dibujo al aprovechar la simetría de la parábola: una de sus ramas es el reflejo de la otra a partir de su eje de simetría.
3. Por ejemplo, en  $y = 0.25x^2 - 2x - 10$  elijo un valor en el eje X y su simétrico como referencia inicial. Dicho valor dependerá de los coeficientes; en este caso no son muy grandes, así que uno adecuado es  $x = 6$ , y su simétrico es  $x = -6$ .
4. Evalúo ambos valores en la ecuación para completar los puntos. En este caso  $(-6, 11)$  y  $(6, -13)$ . Antes de representarlos, no debo olvidar que al hacer  $x = 0$  obtengo otro punto fácilmente, en este caso  $(0, -10)$ .
5. Elijo una escala adecuada. También depende de los coeficientes, si tomo en cuenta los puntos que calculé puedo hacer una buena propuesta.
6. Ahora sí, marco los primeros dos puntos. Hago trazos ligeros para indicar cómo imagino que da vuelta la parábola (solo puede hacerlo de arriba para abajo o viceversa). Agrego el punto con  $x = 0$ , para mejorar mi perspectiva.
7. Si es necesario, calculo un nuevo punto que aclare las dudas que me llegaran a surgir. A la derecha puedo ver en tres imágenes los pasos aquí descritos.
8. Este procedimiento no permite calcular con exactitud el vértice de la parábola, pero sí estimarlo adecuadamente. Para ello, debo recordar lo que indagué en Key.





### Sesión 6

#### Propósito

Los alumnos aprenderán a graficar parábolas a partir del foco y la directriz mediante un procedimiento manual guiado. Posteriormente, aplicarán este conocimiento generando nuevas parábolas en GeoGebra, donde podrán observar cómo cambian las gráficas al modificar los elementos dados.

**Tip 1.** Para la sección **#Subenivel** de la **página 104**, forme equipos de alumnos heterogéneos con la finalidad de que se expliquen y discutan entre ellos las respuestas de las actividades y que al final comparen sus respuestas. Una vez concluida por todos los equipos, verifique sus respuestas en plenaria, y guíelos en una reflexión sobre las dificultades que se presentaron.

**Tip 2.** Al resolver los ejercicios de la sección **Practico más**, en el recurso **Key Variaciones lineales y no lineales**, algunos estudiantes pueden confundirse al clasificar relaciones no lineales si estas muestran comportamientos crecientes o decrecientes que parecen "parecidos" a los lineales. Recuérdeles que, en una variación lineal, los cambios entre las cantidades mantienen una misma razón constante, mientras que en las no lineales esa razón varía.

**Tip 3.** Al trabajar los ejercicios del **Practico más** del recurso **Key: Variación cuadrática**, algunos estudiantes pueden dudar al reconocer que las gráficas o las tablas corresponden a una relación cuadrática, especialmente si el crecimiento no es uniforme o si el cambio inicial parece lento. Recuérdeles que, a diferencia de las variaciones lineales, las cuadráticas muestran cambios progresivos: los incrementos entre los valores se van haciendo cada vez mayores o menores de forma acelerada.

#### #SUBENIVEL

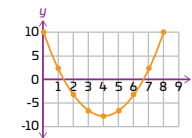
¡Pon a prueba tu destreza matemática! Realiza lo que se indica y anota cuántos pasos, ya sean cálculos o razonamientos diferentes, utilizaste.

01 Anota V si la afirmación es verdadera, o F si es falsa.

Afirmación	V/F
Las gráficas de las variaciones lineales son solo rectas.	V
Las gráficas de las variaciones no lineales pueden ser rectas o curvas.	F
Solo se puede verificar si una variación es lineal o no, observando su gráfica.	F
La ecuación de la parábola se generaliza con la expresión: $y = ax^2 + bx + c$ .	V
El signo del coeficiente $b$ indica si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.	F
Toda parábola es descrita mediante una ecuación cuadrática.	V

Pasos empleados: R L

02 Anota si la gráfica o ecuación es lineal o no lineal.



No lineal

Lineal Ecuación:  $y = 9 - 4x$

No lineal



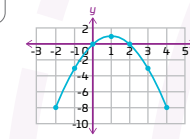
Pasos empleados: R L

03 Une cada concepto con el valor que le corresponde, de acuerdo con la ecuación  $y = x^2 - 6x + 9$ .

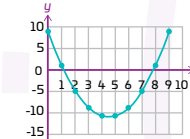
Concepto	Valores
Valor de $a$	-6
Valor de $b$	arriba
Valor de $c$	1
Coordenada de $x$ en el vértice	3
Coordenada de $y$ en el vértice	(3,0)
Vértice	abajo
La parábola abre hacia	0
	9

Pasos empleados: R L

04 Une con una línea, cada gráfica con su ecuación.



$y = x^2 - 9x + 9$



$y = -x^2 + 2x$

Pasos empleados: R L

Cada dos pasos empleados equivalen a un punto. Tienes buen nivel si hiciste pocos puntos.

Puntaje: R L

¿Qué ventajas y desventajas tiene el que requieras menos o más pasos que los demás? Discútelo con la clase.  
¿Qué reconocimiento darías al que menos puntos hizo?  
¿Necesariamente está mal quien hizo más puntos?

### Sesión 7

#### Propósito:

Los estudiantes consolidarán los conocimientos adquiridos en la Esfera al ejercitarse con ejercicios diversos. Reflexionarán sobre lo aprendido y valorarán los temas que estudiaron.

**Tip 1.** Para completar la sección **APLICO** solicite a los estudiantes que regresen a la **página 97** para valorar su progreso durante la **Esfera**, y pídales que resuelvan nuevamente la sección **RECONOZCO** para identificar su avance.

**Tip 2.** Al realizar la valoración de avance en la página 142, algunos estudiantes pueden limitarse a copiar sus respuestas previas o responder de forma superficial. Invítelos a reflexionar sobre los errores que cometieron inicialmente y a explicar en qué aspectos mejoraron su comprensión. Esta revisión puede ser una buena oportunidad para identificar ideas que aún requieren aclaración o para detectar patrones de error persistentes.

**Tip 3.** Para finalizar la esfera, pida que realicen el imprimible **Maths Mastery T1\_5** que permitirá ejercitar el tema aprendido.



Solicite a los alumnos que trabajen el siguiente paso de su **Big Challenge**, como se indica en la **Carpeta de Productor**.

APLICO ●●●●●●●●

Reflexiona sobre las preguntas de la sección **ANALIZO**, ¿ya puedes contestarlas? Escribe tus respuestas, considera lo que aprendiste en esta Esfera de Exploración.

R L

¿Qué nuevas inquietudes te surgen acerca del tema trabajado en la Esfera? ¡Registra tus ideas aquí y discútelas con tus compañeros!

R L

¡Regresa a la página 97 y soluciona las dudas que tenías en ese momento! 😊



Es momento de **valorar** tu progreso de aprendizaje. Resuelve de nuevo en tu cuaderno la sección **RECONOZCO**.

¡YA LO HICE!

Notas sobre mi aprendizaje

R L

